

第四章 光的衍射

第二节

费涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

第二节 费涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

2.1 实验现象

2.2 半波带法

2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

2.4 菲涅耳波带片

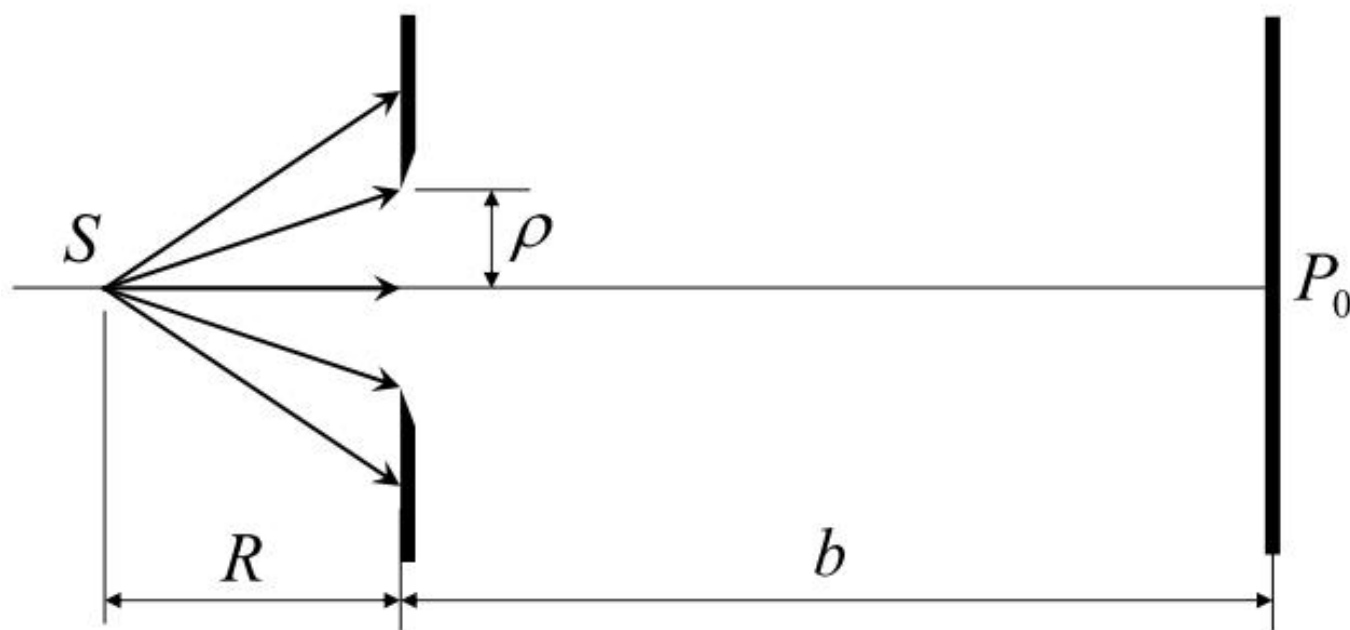
2.1 实验现象

一般参数：

圆孔半径： $\rho \sim 1\text{mm}$

源屏距离： $R \sim 1\text{m}$

屏屏距离： $b \sim 3-5\text{m}$



2.1 实验现象

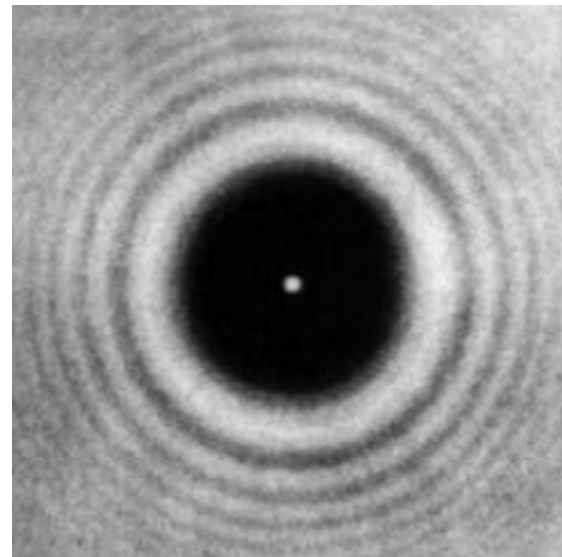
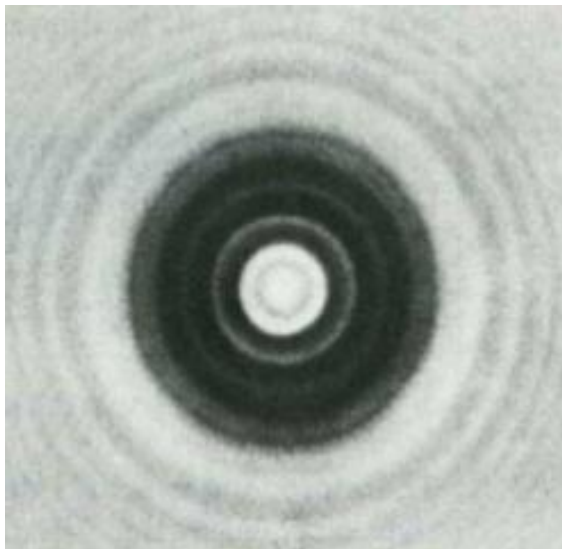
现象：

i) 圆孔衍射

一套亮暗相间的同心圆环，中心可亮可暗，由 ρ 、 R 、 b 的具体参数决定。接收屏沿轴向移动，圆环中心明暗交替变化。

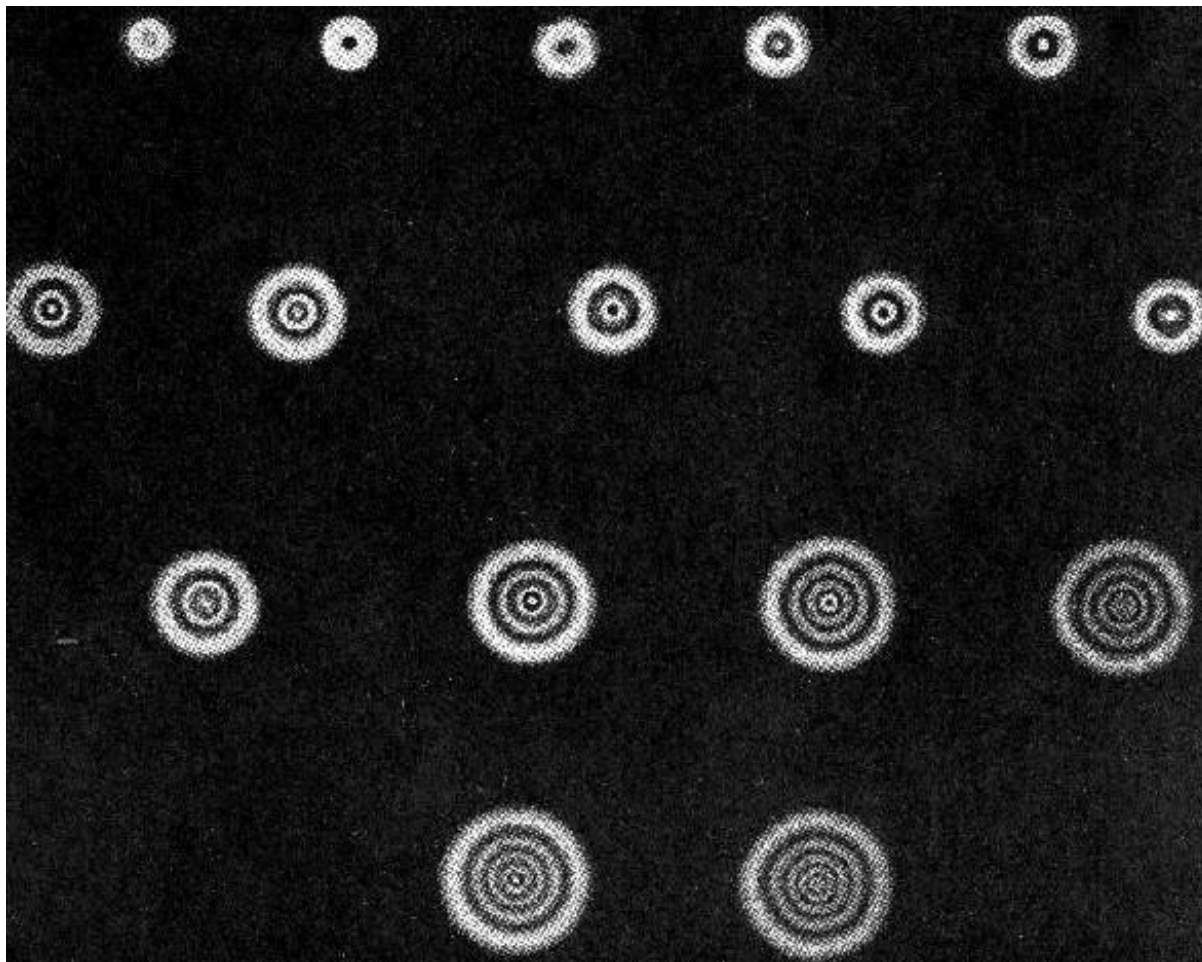
ii) 圆屏衍射

基本同圆孔，但中心总是亮点



2.1 实验现象

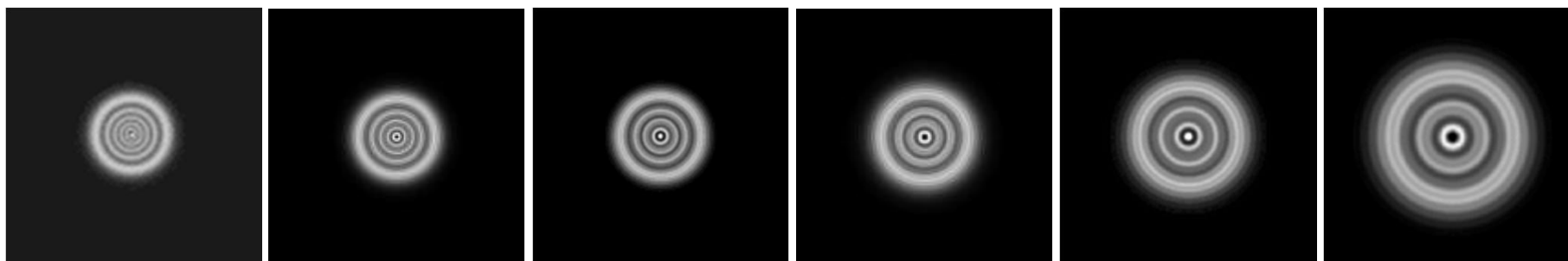
圆孔的菲涅耳衍射图样：



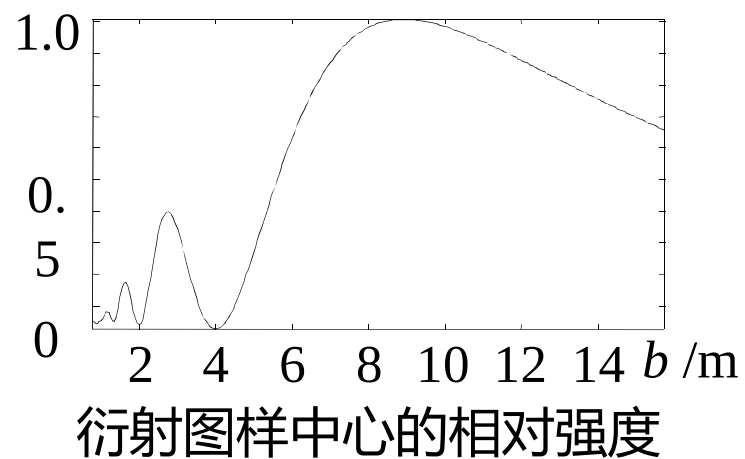
圆孔依次增大时的衍射图样

2.1 实验现象

圆孔的菲涅耳衍射图样：



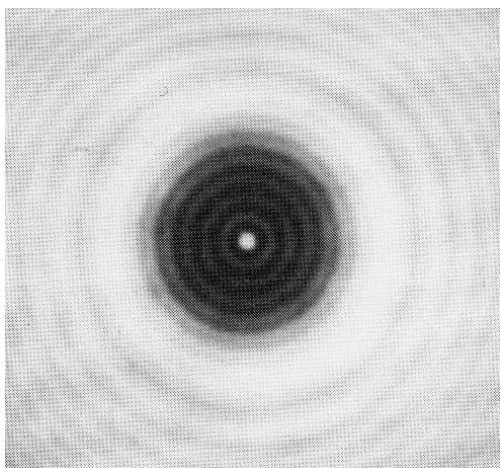
(a) $b=1.14\text{m}$ (b) $b=1.35\text{m}$ (c) $b=1.60\text{m}$ (d) $b=2.00\text{m}$ (e) $b=2.70\text{m}$ (f) $b=4.00\text{m}$



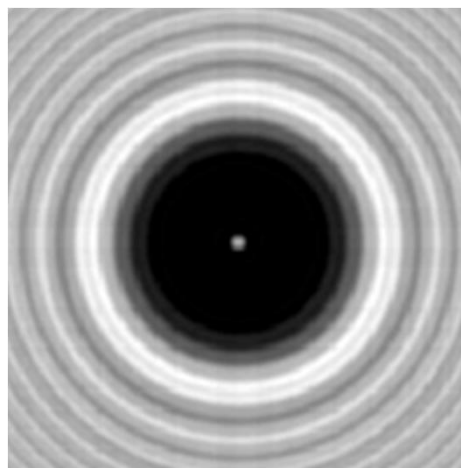
圆孔的菲涅耳衍射仿真图样（ b : 观察平面到衍射屏平面的距离）

2.1 实验现象

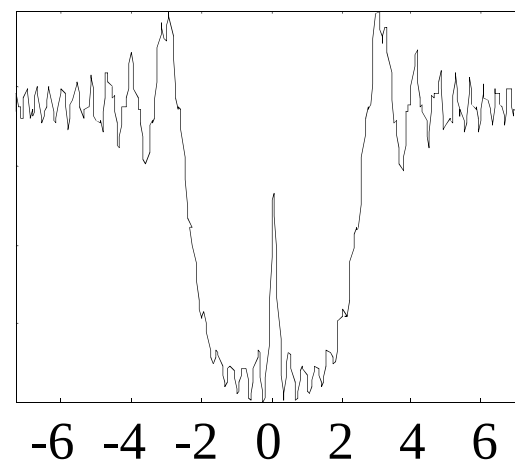
圆盘的非涅耳衍射图样：



(a) 实验图样



(b) 仿真图样



(c) 相对强度分布

圆盘的非涅耳衍射

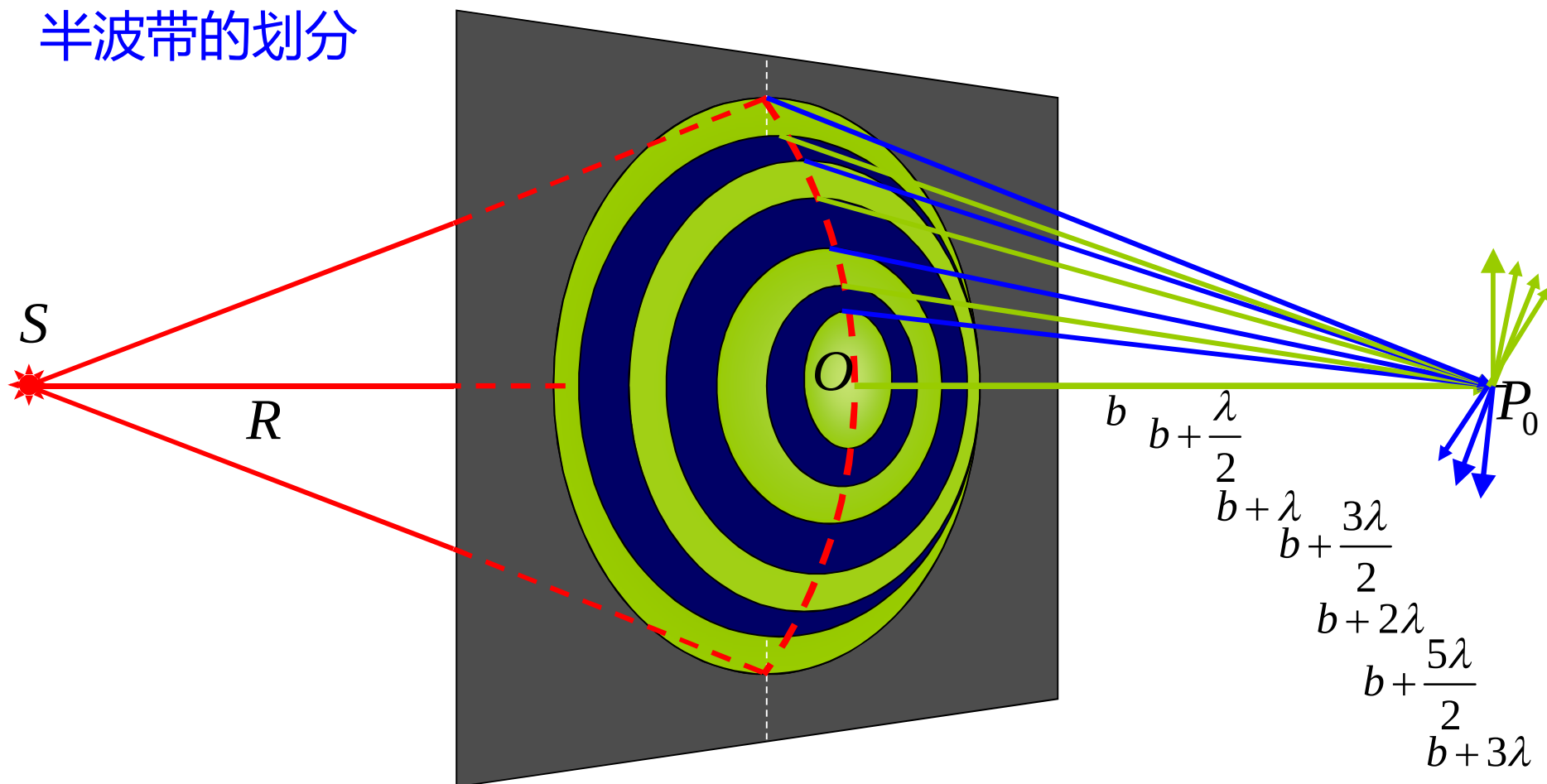
2.2 半波带法

目标：设法求解菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式。

思路：将积分近似化为求和。

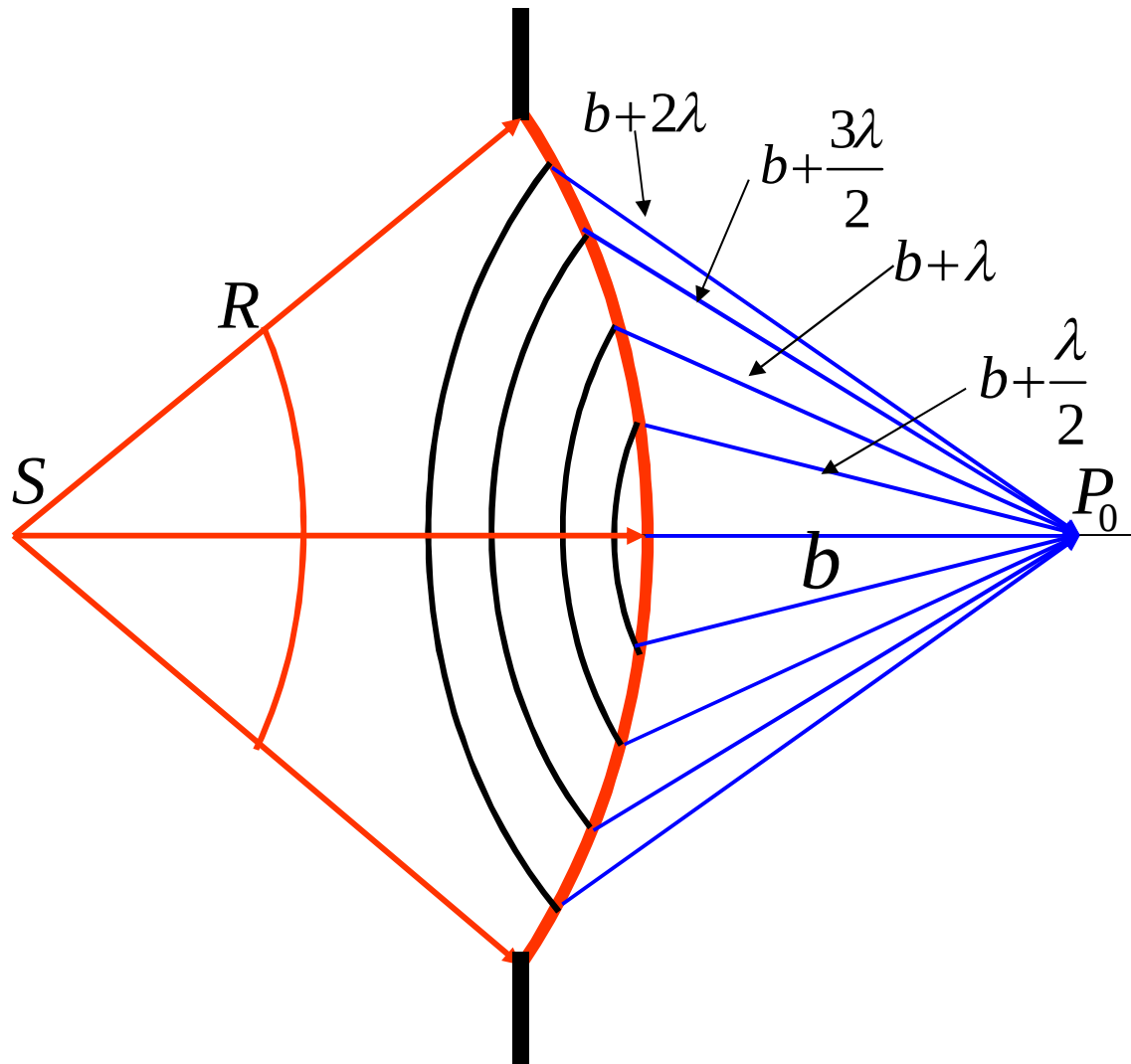
做法：将波前（球面）划分为一系列的同心圆环带，每一带的边缘到 P_0 点的距离依次相差半个波长。这些圆环带称为**半波带**。

半波带的划分



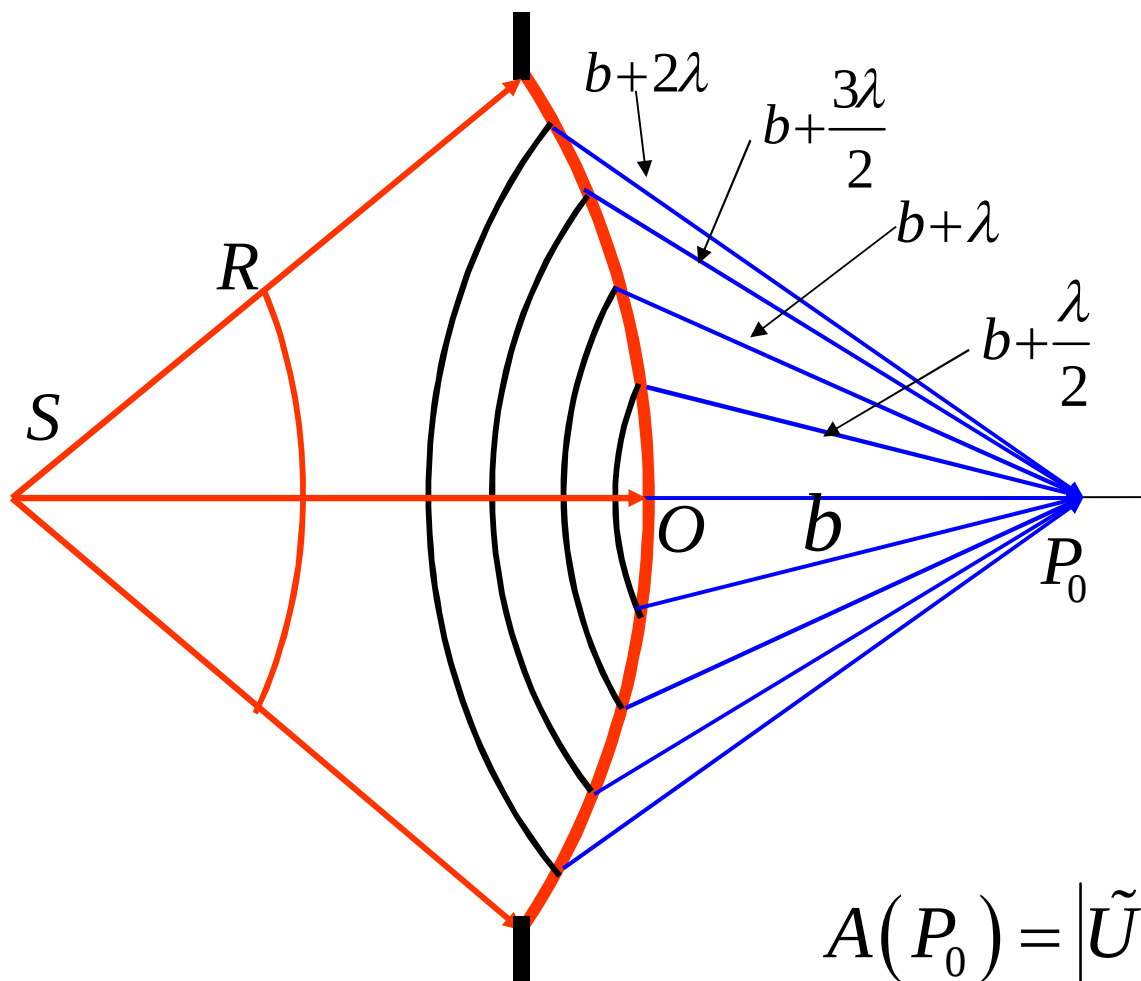
2.2 半波带法

半波带的波次



- 在球面上，各次波波源的初相位相等。相邻半波带发出的次波，到达 P_0 点时，光程差为 $\lambda/2$ ，相位差为 π ，相位相反，振动方向相反，且振幅依次减小
- 复振幅叠加的效果：相互抵消

2.2 半波带法



$$\Delta \tilde{U}_1(P_0) = A_1(P_0) e^{i\varphi_1}$$

$$\Delta \tilde{U}_2(P_0) = A_2(P_0) e^{i(\varphi_1 + \pi)}$$

$$\Delta \tilde{U}_3(P_0) = A_3(P_0) e^{i(\varphi_1 + 2\pi)}$$

.....

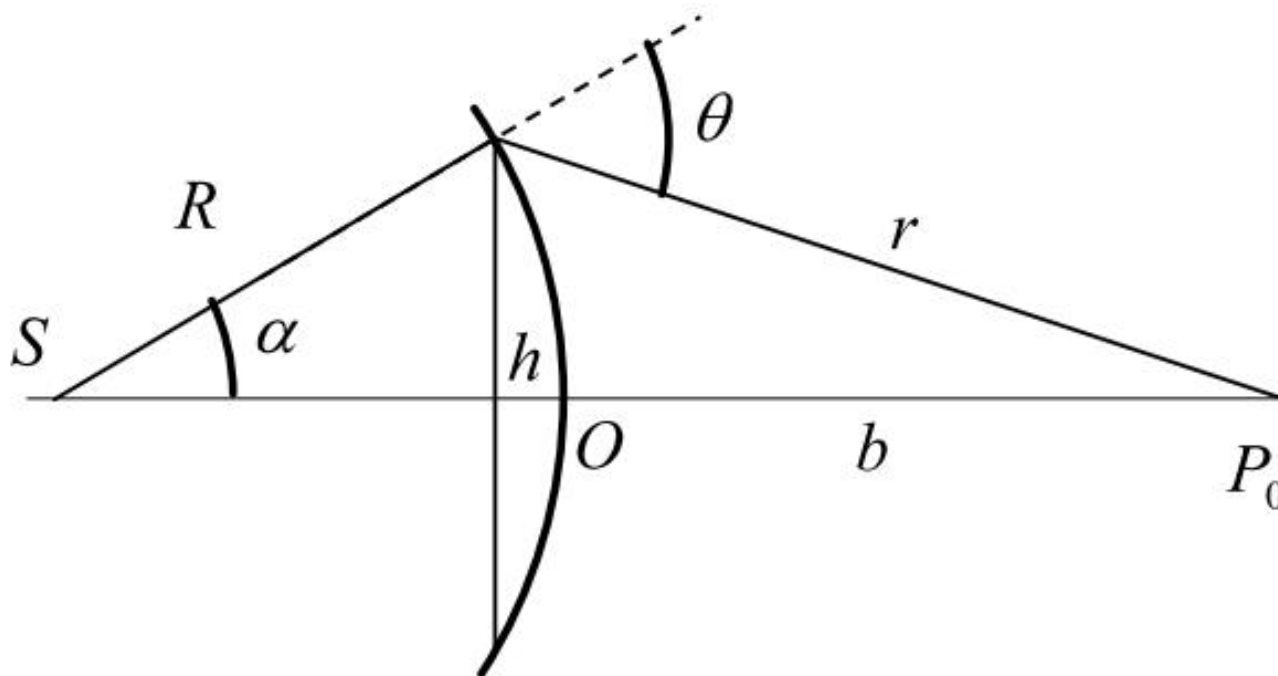
$$A(P_0) = |\tilde{U}(P_0)| = \left| \sum_{j=1}^n \Delta \tilde{U}_j(P_0) \right|$$

$$= A_1(P_0) - A_2(P_0) + A_3(P_0) - \cdots + (-1)^{n+1} A_n(P_0)$$

2.2 半波带法

半波带复振幅和半波带面积的关系

$$A_m \propto F(0, \theta_m) \frac{\Delta \Sigma_m}{r_m}$$



半波带的面积 S_m

半波带的面积 S_m



$$= 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$dS = 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi$$

$$\Delta \text{SMP}_0 \text{中} \quad \cos \varphi = \frac{R^2 + (R+b)^2 - r_m^2}{2R(R+b)}$$

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{r_m}{R(R+b)} dr_m \quad dS = \frac{2\pi R r_m}{R+b} dr_m$$

$$\mathrm{d}r_m = \lambda / 2$$

第 m 个半波带的面积

$$dS = S_m = \Delta \Sigma_m$$

$$\frac{\Delta \Sigma_m}{r_m} = \frac{\pi R}{R+b} \lambda$$

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}(P_0) &= K \oiint_{\Sigma} \tilde{U}(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \\
 &= K \sum_{m=1}^n \tilde{U}(Q) F(0, \theta_m) e^{ikr_m} \frac{\Delta\Sigma_m}{r_m} \quad \frac{\Delta\Sigma_m}{r_m} = \frac{\pi R}{R+r_0} \lambda \\
 &= K \tilde{U} \frac{\Delta\Sigma_m}{r_m} \sum_{m=1}^n F(0, \theta_m) e^{i[\varphi_0 + (m-1)\pi]} \quad \text{常数} \\
 &= K \tilde{U} e^{i\varphi_0} \frac{\Delta\Sigma_m}{r_m} \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} (1 + \cos \theta_m) e^{i(m-1)\pi} \\
 &= \tilde{A} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} (1 + \cos \theta_m) \quad (\tilde{A} = \frac{K \tilde{U} e^{i\varphi_0}}{2} \frac{\Delta\Sigma_m}{r_m})
 \end{aligned}$$

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

$$\tilde{U}(P_0) = \tilde{A} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} (1 + \cos \theta_m) = \sum_{m=1}^n \tilde{U}_m = \sum_{m=1}^n A_m (-1)^{m-1}$$

$$\tilde{U}_m = \tilde{A} (1 + \cos \theta_m) (-1)^{m-1}$$

为第 m 个半波带发出的次波在 P 点的复振幅

$$A_m = |\tilde{A}| (1 + \cos \theta_m)$$

取孔中心次波相位为0, A_m 为第 m 个半波带发出的次波在 P_0 点的振幅。

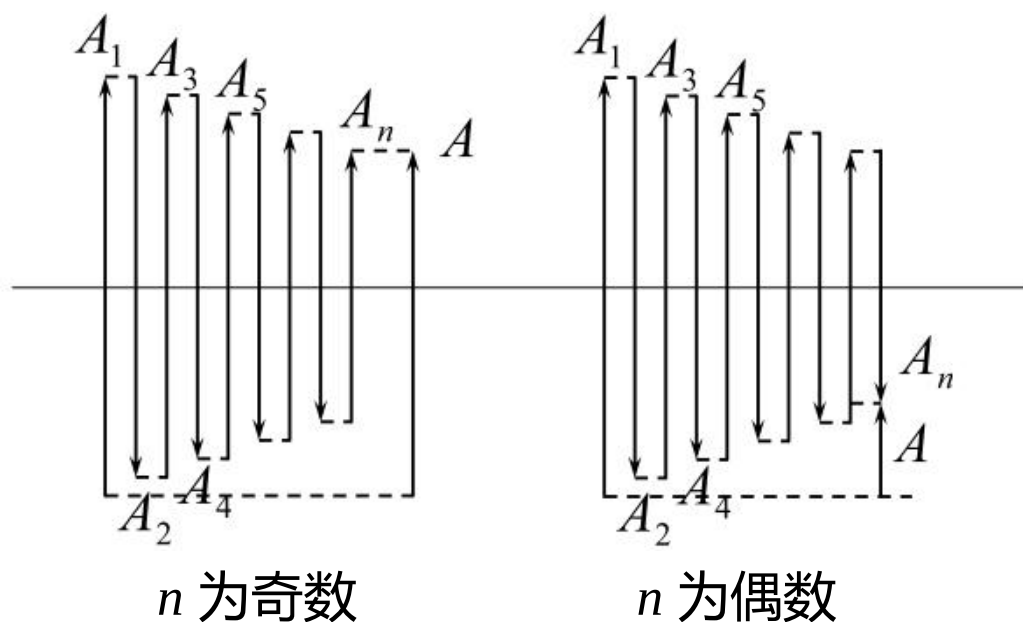
可见, 在 P_0 点处: (1) 相邻波带次波的位相相反; (2) m 越大的波带, 振幅越小。

$$A_{n-1} > A_n > A_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

$$\tilde{U}(P_0) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} A_m = \frac{1}{2} A_1 + \left(\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right) + \left(\frac{1}{2} A_3 - A_4 + \frac{1}{2} A_5 \right) + \dots$$



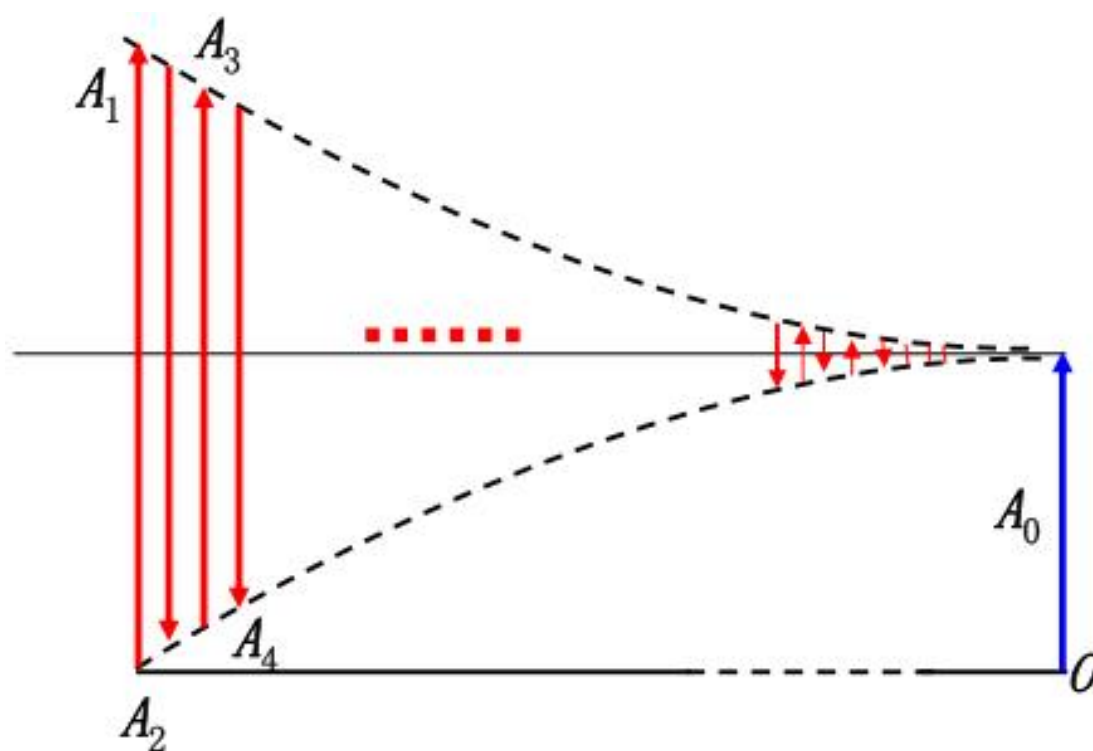
由于由于相邻两半波带之间的振幅相互抵消（ n 较大时）：

$$\tilde{U}(P_0) = \frac{1}{2} [A_1 + (-1)^{n-1} A_n] \quad \text{波带数 } n : \text{奇数, 亮点; 偶数, 暗点}$$

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

(1) 自由传播 $n \rightarrow \infty$
 $A_n \rightarrow 0 \Rightarrow A(P_0) = \frac{1}{2} A_1(P_0)$ 始终亮点



2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

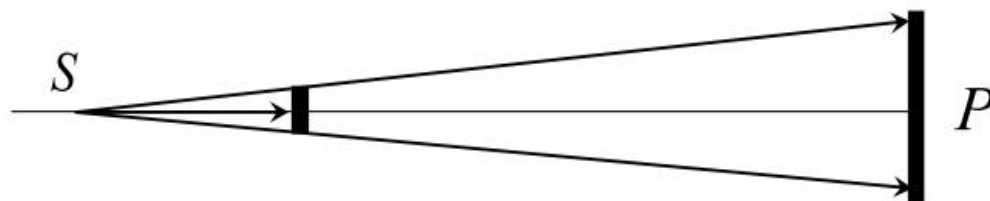
(2) 圆屏衍射 前 n 个半波带被遮住

$$A(P_0) = \sum_{n+1}^{\infty} A_j = \frac{1}{2} A_{n+1}(P_0)$$

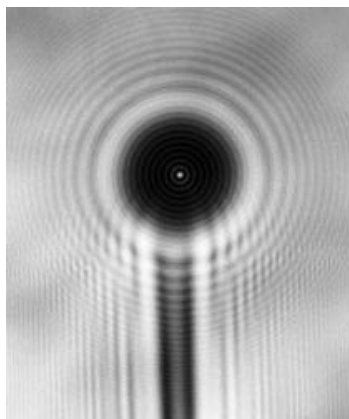
中心总是亮点。

2.2 半波带法

惠更斯-费涅耳原理在1818巴黎科学院的一次科学竞赛中提出后，倾向微粒说的评委泊松据此算出圆屏衍射的中心竟会是一亮斑（泊松亮斑），觉得十分荒谬：影子中间怎么会出现亮斑呢？但随后阿拉果的实验观察到了圆屏衍射的中心亮斑，位置亮度和理论符合得相当完美。



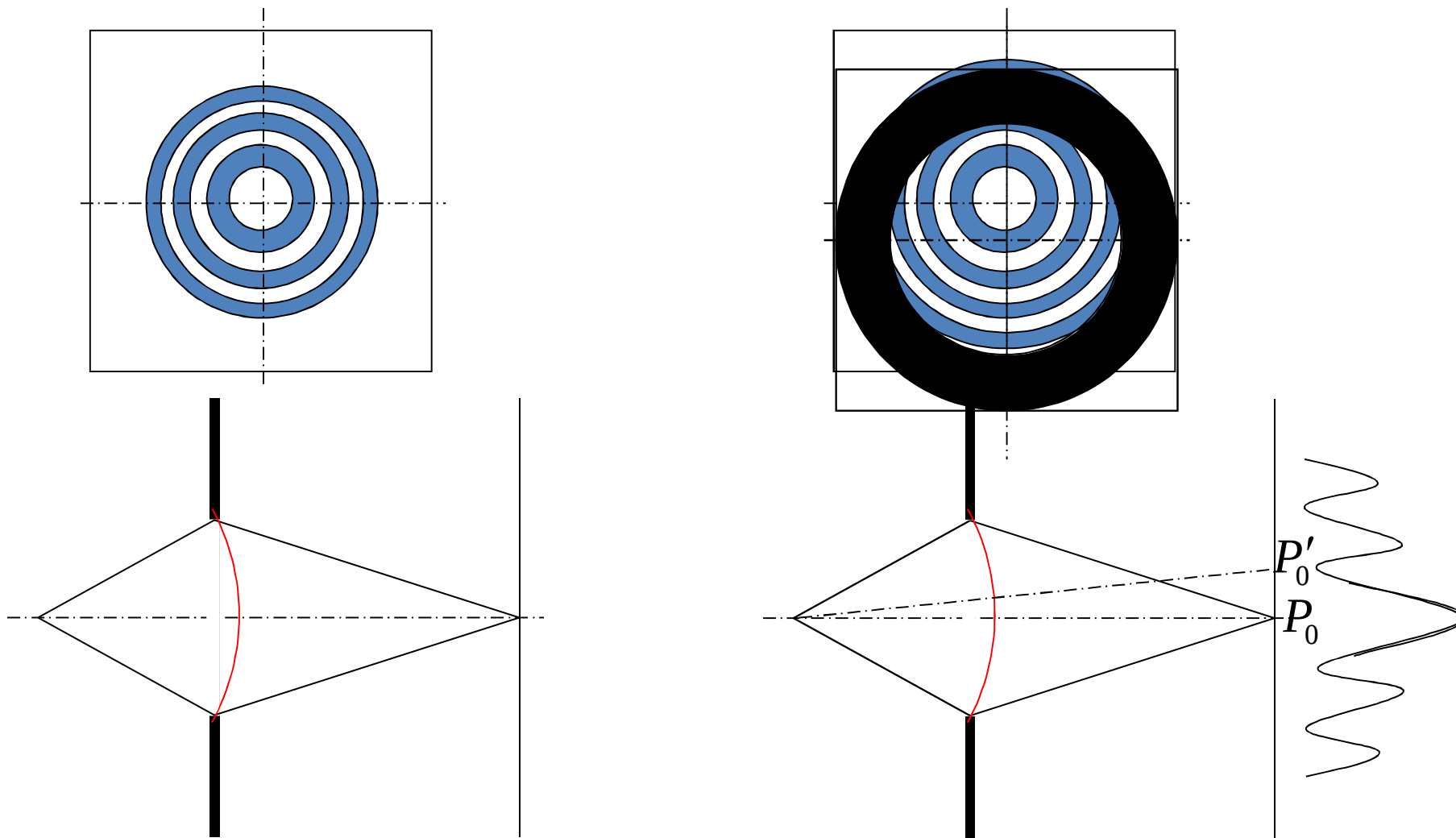
泊松



Francois Arago

2.2 半波带法

轴外情况下的圆孔衍射花样：



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

半波带的进一步细分——一般情况下的波带

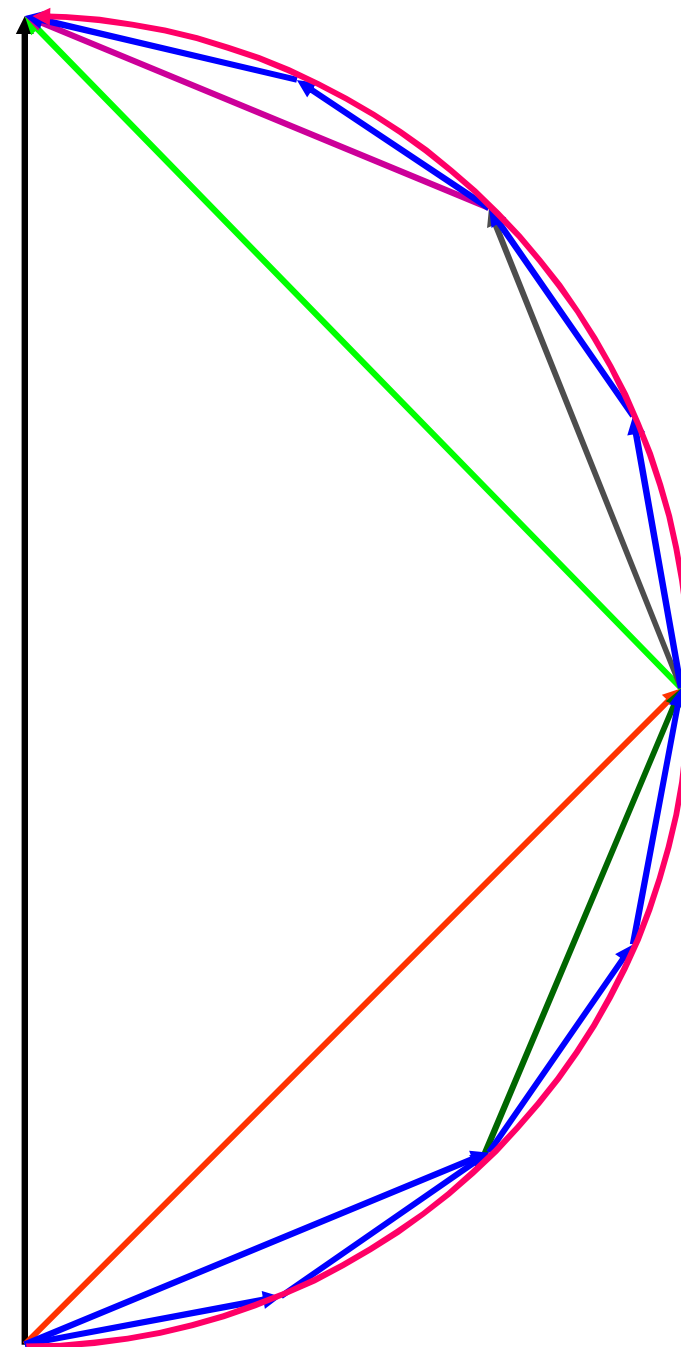
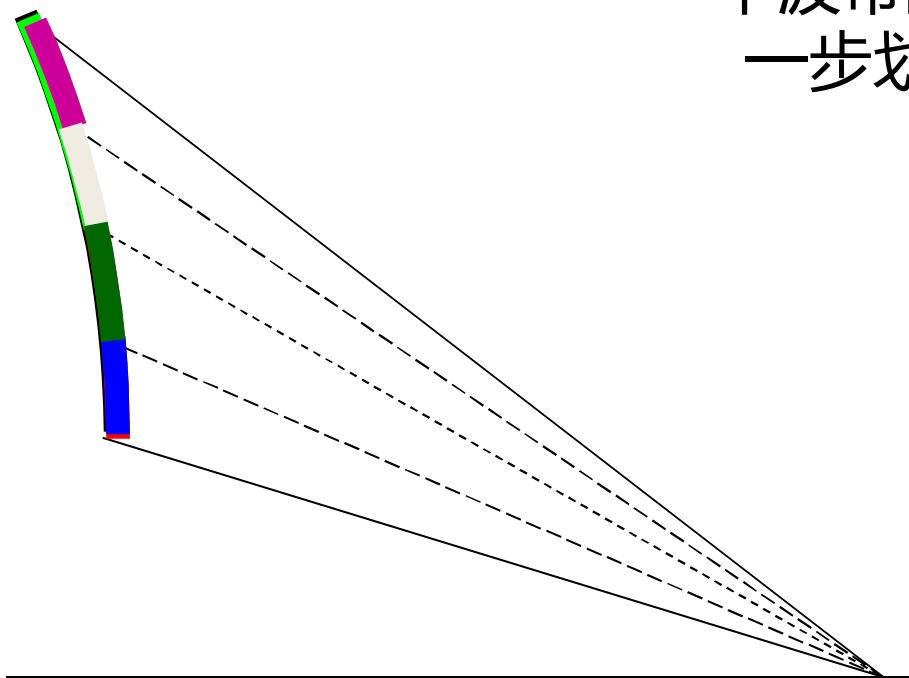
当圆孔内包含的不是整个半波带时，则需要对半波带进行更细的划分。

- **两分**：将每一个半波带划分为两个，则相邻波带发出的次波在P点位相差为 $\pi/2$ ，即第一个半波带中的第一个波带和第二个波带的位相分别为 $\pi/4$ 和 $3\pi/4$ ；
- **四分**：再将每一个进一步细分，第一个半波带中的四个波带的位相差为 $\pi/4$ ，位相依此为 $\pi/16$ ， $5\pi/16$ ， $9\pi/16$ ， $13\pi/16$ ，.....。
- **无限分**：可以将任何一个半波带进一步细分为 n 个，得到更多的波带，相邻波带间光程差为 $\lambda/2n$ ，位相差为 π/n 。 n 很大时，位相差很小，用振幅矢量法，原来的每个半波带的波矢变为由 n 个小波矢组成的半圆。

2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

半波带的进一步细分——一般情况下的波带

半波带的进
一步划分

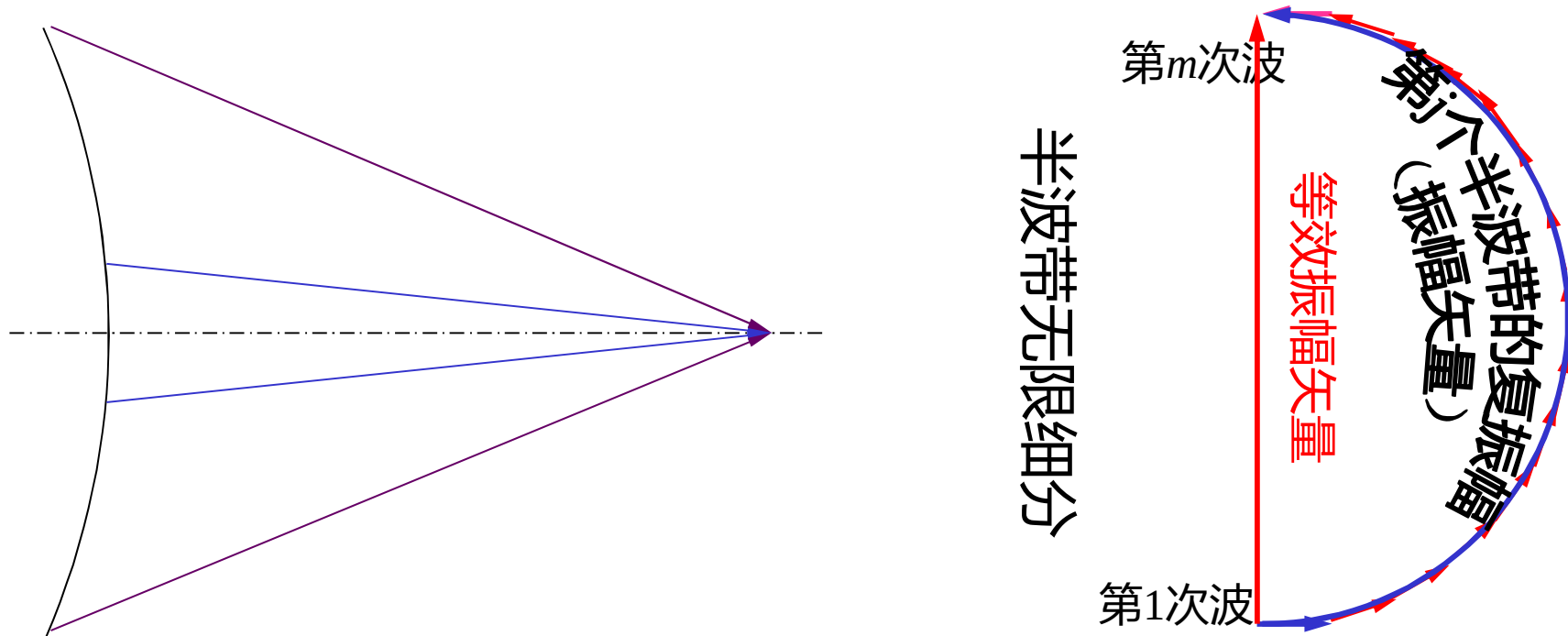


2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

每个菲涅耳半波带的振幅矢量

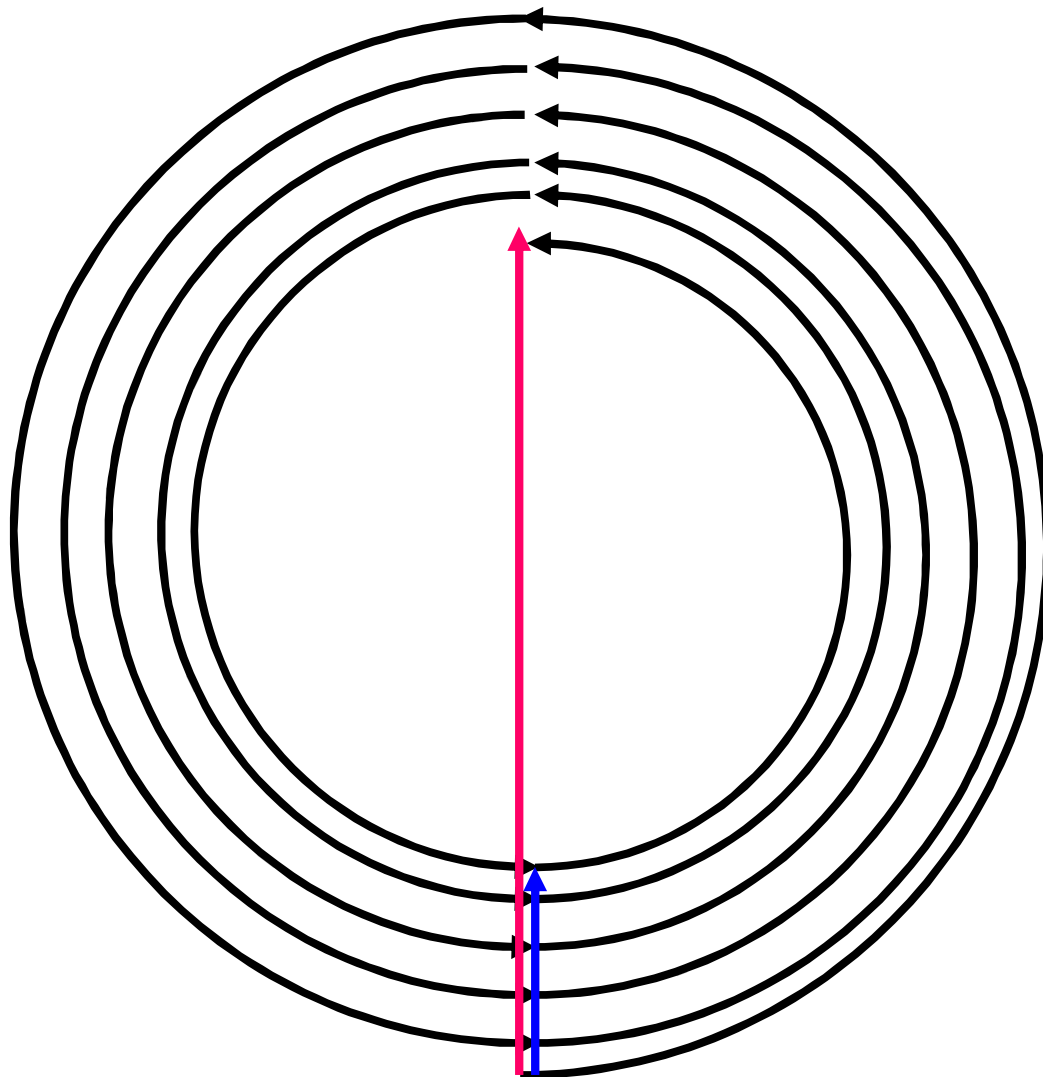
使每个半波带发出的所有**次波**的振幅矢量进行相干叠加

- 将每一半波带 **m 等分**，相邻次波相位差 π/m
- 满足傍轴条件（各列次波的倾斜因子相近），各次波振幅近似相等
- 进一步再处理各个半波带复振幅的相干叠加



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

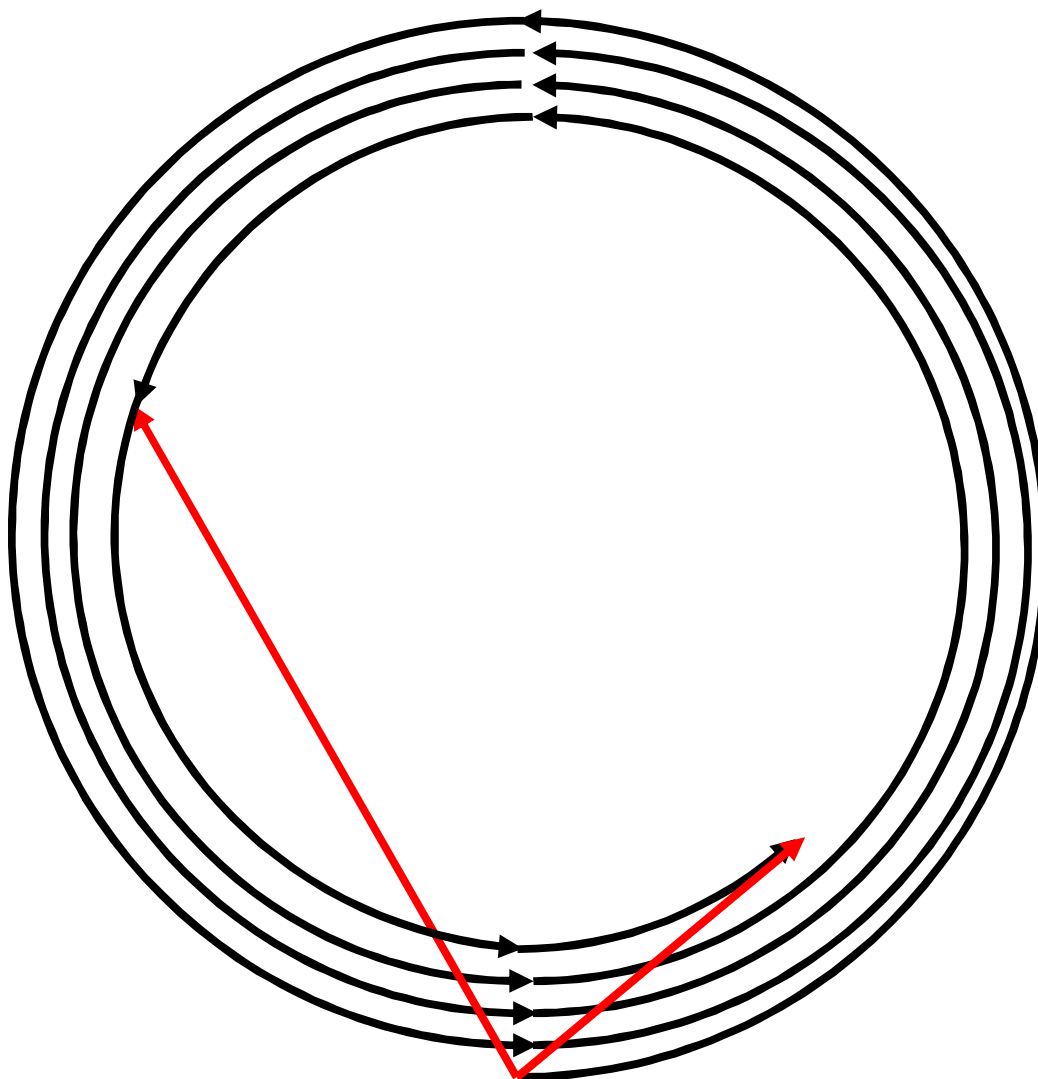
半波带的弧形振幅矢量



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

非整数个半波带

如果最后一个不是整数个半波带，也可以得到合振动。



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

例：圆孔包含1/2个半波带时轴上的衍射强度

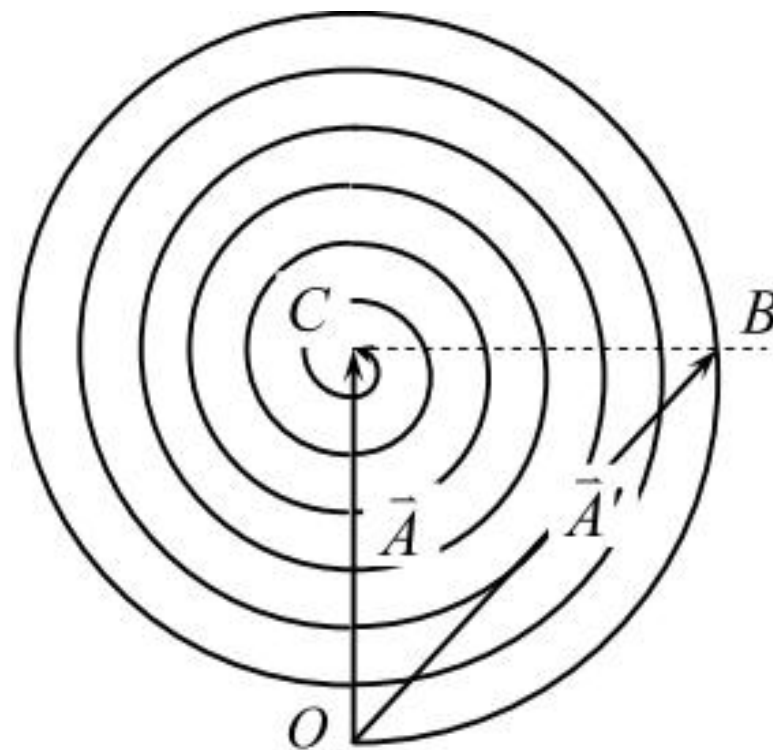
边缘与中心光程差

$\lambda/4$ ，位相差 $\pi/2$ ，振

动曲线为OB

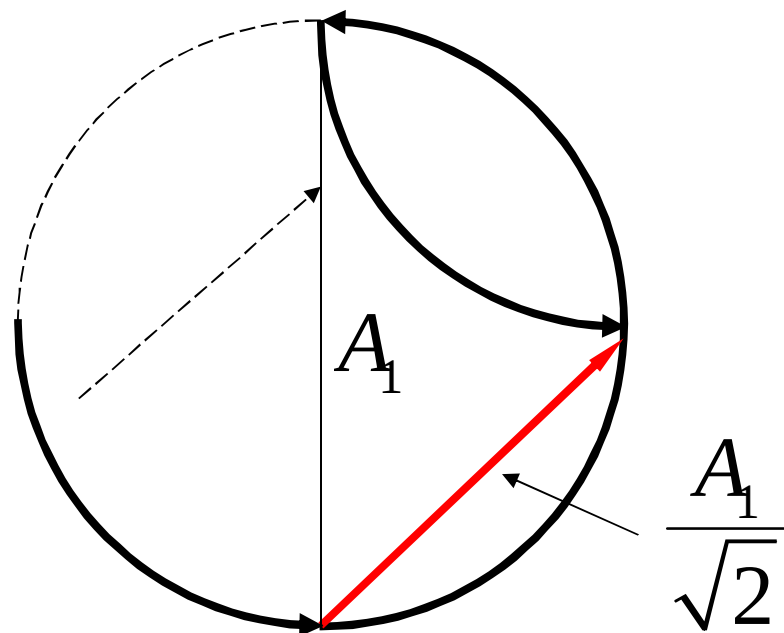
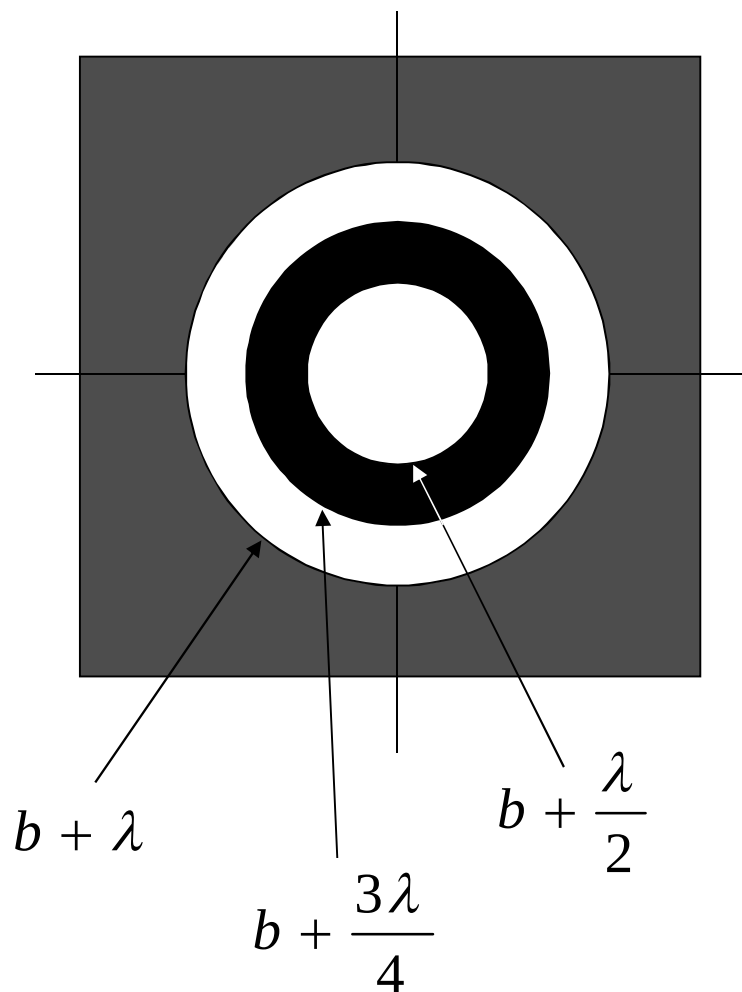
$$A' = \overline{OB} = \sqrt{2}A$$

$$I' = 2A^2$$



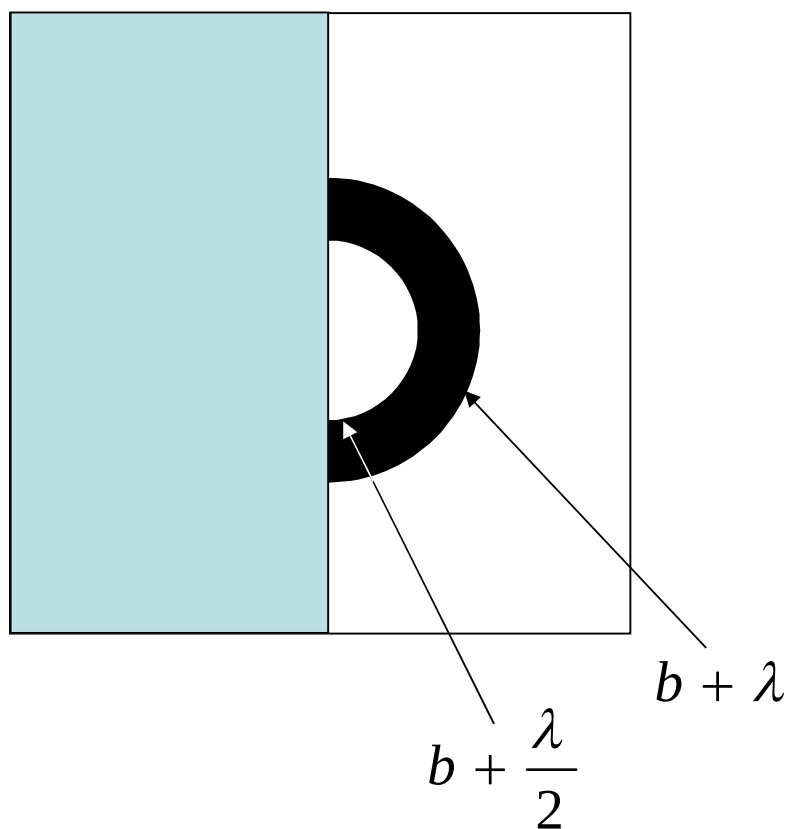
2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

例：利用矢量法求解波带片的菲涅耳衍射问题



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

例：利用矢量法求解波带片的菲涅耳衍射问题

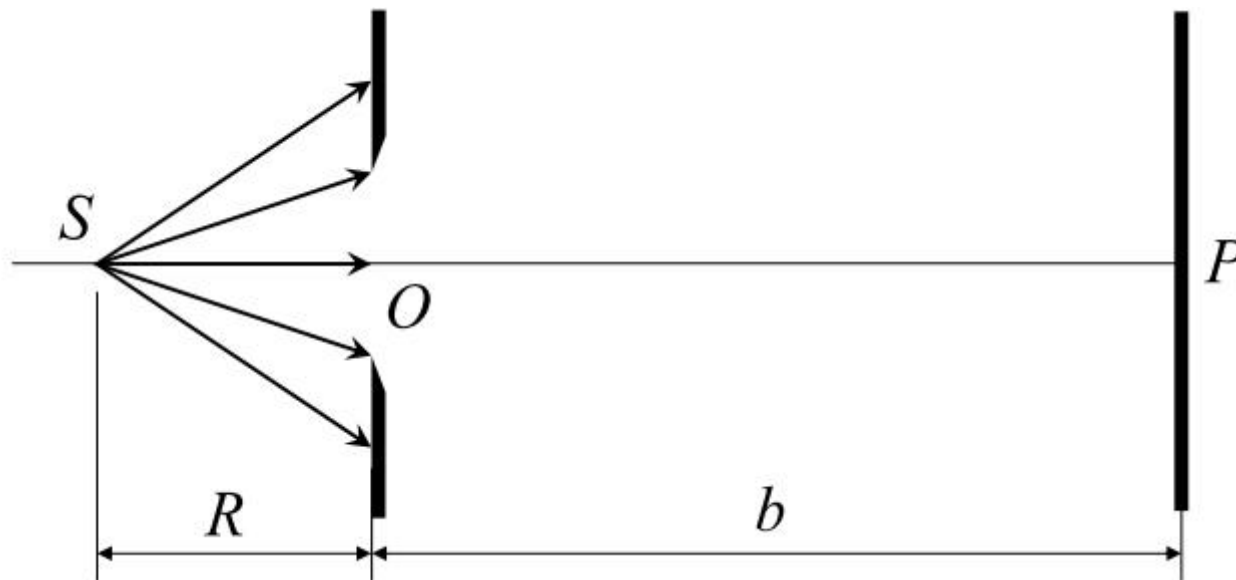


A vector diagram illustrating the Fresnel diffraction problem. It shows a vertical blue line with two upward-pointing arrows. The lower arrow is labeled $\frac{A_1}{2}$ and the upper arrow is labeled $\frac{A_3}{4}$. A dashed semi-circular arc is drawn to the right of the blue line, connecting the endpoints of the two arrows. Below the diagram, the following equation is given:

$$\frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{4} \approx \frac{3A_1}{4}$$

2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

例：利用光场的自由传播，验证比例系数 $K = \frac{-i}{\lambda}$



自由传播的球面波

$$\tilde{U} = \frac{a}{r} e^{ikr}$$



在衍射屏处 $\tilde{U}(O) = \frac{a}{R} e^{ikR}$

在屏幕处 $\tilde{U}(P) = \frac{a}{R+b} e^{ik(R+b)}$

2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

例：利用光场的自由传播，验证比例系数 $K = \frac{-i}{\lambda}$ (续)

$$\tilde{U}(P) = \frac{a}{R+b} e^{ik(R+b)} = \frac{1}{2} \tilde{U}_1(P)$$

$$\tilde{U}_1(P) = K \iint_{\text{第一个半波带}} \tilde{U}_0(O) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

对第一个半波带 $F(\theta_0, \theta) \simeq 1$ $\tilde{U}_0(O) = \tilde{U}(O) = \frac{a}{R} e^{ikR}$ $\frac{d\Sigma}{r} = \frac{2\pi R}{R+b} dr$

$$\tilde{U}_1(P) = K \int_b^{b+\lambda/2} \tilde{U}_0(O) e^{ikr} dr = \frac{2\pi a K}{R+b} e^{ikR} \int_b^{b+\lambda/2} e^{ikr} dr$$

$$= \frac{2\pi a K}{ik(R+b)} e^{ik(R+b)} \left(e^{\frac{ik\lambda}{2}} - 1 \right) = -\frac{4\pi a K}{ik(R+b)} e^{ik(R+b)}$$

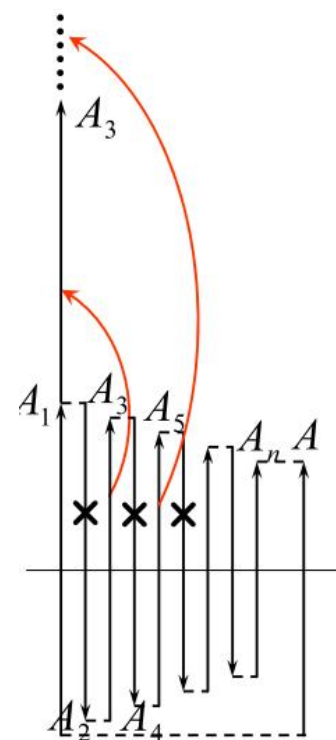
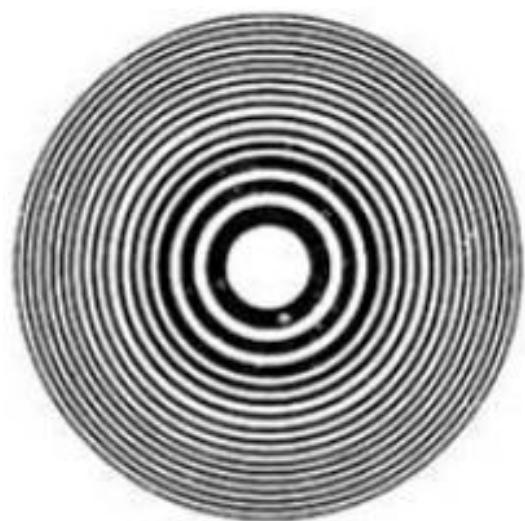
$$= -\frac{2\lambda a K}{i(R+b)} e^{ik(R+b)}$$

与自由传播到P点比较：

$$\frac{-\lambda K}{i} = 1 \text{ 或 } K = \frac{-i}{\lambda}$$

2.4 菲涅耳波带片

- 用半波带将波面分割，然后只让其中的奇数（或偶数）半波带透光，即制成波带片。
- 透过波带片的光，在场点P处光程差依次为 λ ，相位相同，振动方向也相同，合振动大大增强，衍射后的光强大大增强。
- 效果：相当于将光波汇聚到P点。
- 一般情况下，可以认为前面几个半波带的倾斜因子相差不大，即满足近轴条件，所以他们发出的次波的振幅近似相等。



2.4 菲涅耳波带片

例：一个波带片有20个半波带，求在P点的复振幅和光强

$$\tilde{U}(P) = A_1 + A_3 + A_5 + \cdots + A_{19} \approx 10A_1$$

光强

$$I(P) = \tilde{U}(P) \times \tilde{U}^*(P) = 100A_1^2$$

自由传播时

$$\tilde{U}_0(P) = \frac{1}{2}A_1 \quad \Rightarrow \quad I_0(P) = \frac{1}{4}A_1^2$$

相差400倍，可见波带片具有使光汇聚的作用。

2.4 菲涅耳波带片

半波带方程

- 半波带奇偶性的数量关系

$$r_m^2 - b^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2 = mb\lambda + \left(\frac{m}{2}\lambda\right)^2 \approx m\lambda b$$

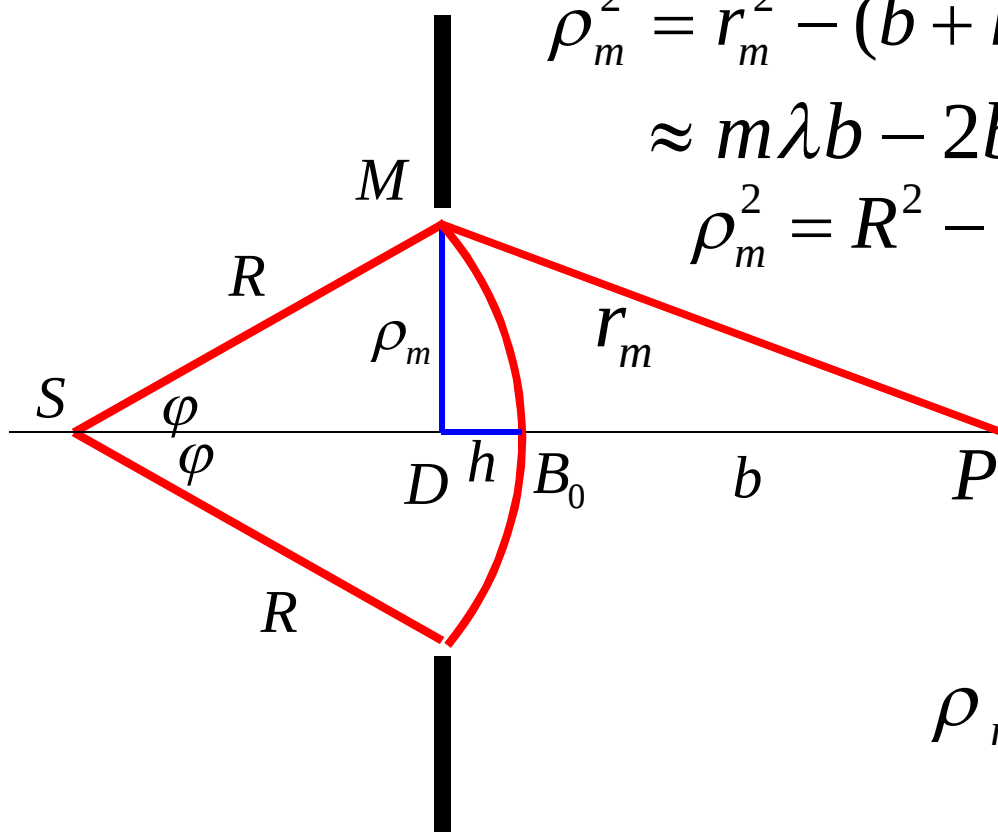
$$\begin{aligned}\rho_m^2 &= r_m^2 - (b + h)^2 = r_m^2 - b^2 - 2bh - h^2 \\ &\approx m\lambda b - 2bh\end{aligned}$$

$$\rho_m^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2 \approx 2Rh$$

$$m\lambda b - 2bh = 2Rh$$

$$h = \frac{mb}{2(R+b)} \lambda$$

$$\rho_m^2 \approx 2Rh = \frac{mbR}{R+b} \lambda$$



2.4 菲涅耳波带片

半波带方程

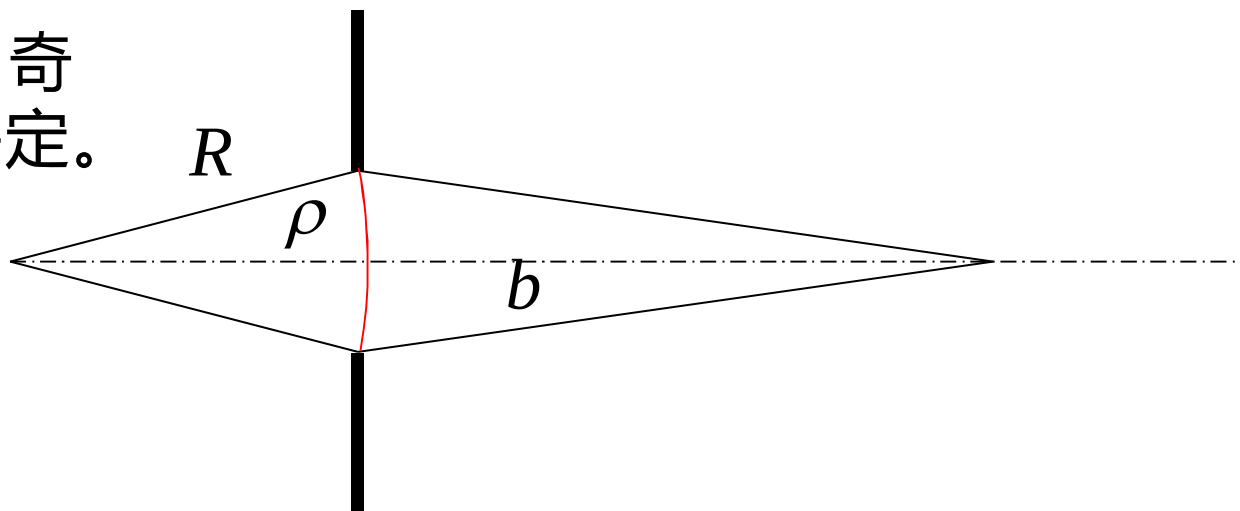
$$\rho_m^2 = \frac{mbR}{R+b} \lambda \quad m = \frac{\rho_m^2}{\lambda} \frac{R+b}{Rb}$$

$$\rho_m = \sqrt{\frac{mbR}{R+b} \lambda} = \sqrt{m} \rho_1 \Rightarrow \frac{\rho_m^2}{m} = \rho_1^2$$

$$m = \frac{\rho_m^2}{\lambda} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} \right)$$

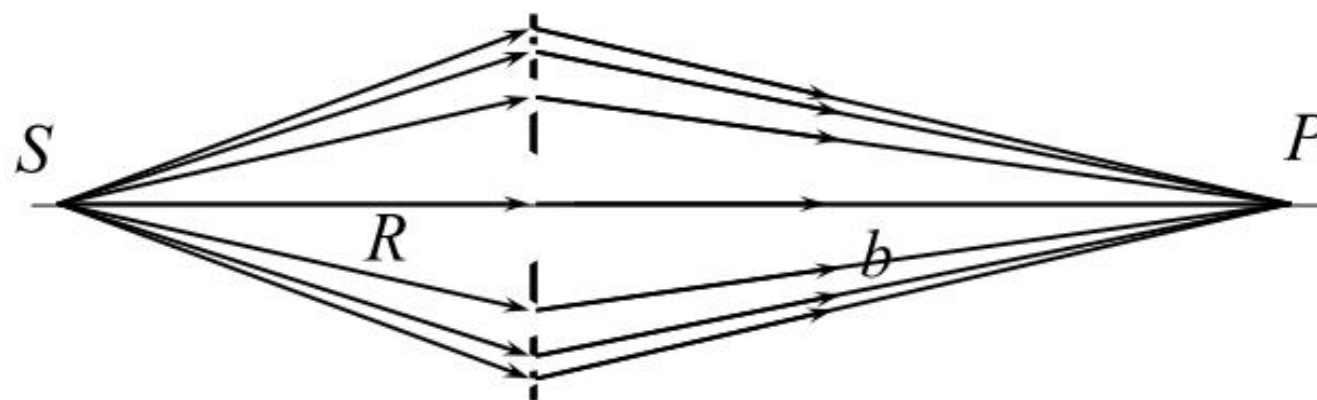
$$\text{半波带方程} \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{\rho_m^2} = \frac{\lambda}{\rho_1^2}$$

m 的数值及奇偶性由 b 决定。



2.4 菲涅耳波带片

波带片方程



如果将 S 、 P 分别看成物点、像点，则构成了费涅耳透镜，其物象关系为：

$$\overset{\text{物距}}{\frac{1}{R}} + \overset{\text{像距}}{\frac{1}{b}} = \frac{m\lambda}{\rho_m^2} = \frac{\lambda}{\rho_1^2} \quad \overset{\text{焦距}}{\rho_1^2}$$

等效于透镜的高斯公式

其中 $f = \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = \frac{\rho_1^2}{\lambda}$ 为波带片的焦距。

2.4 菲涅耳波带片

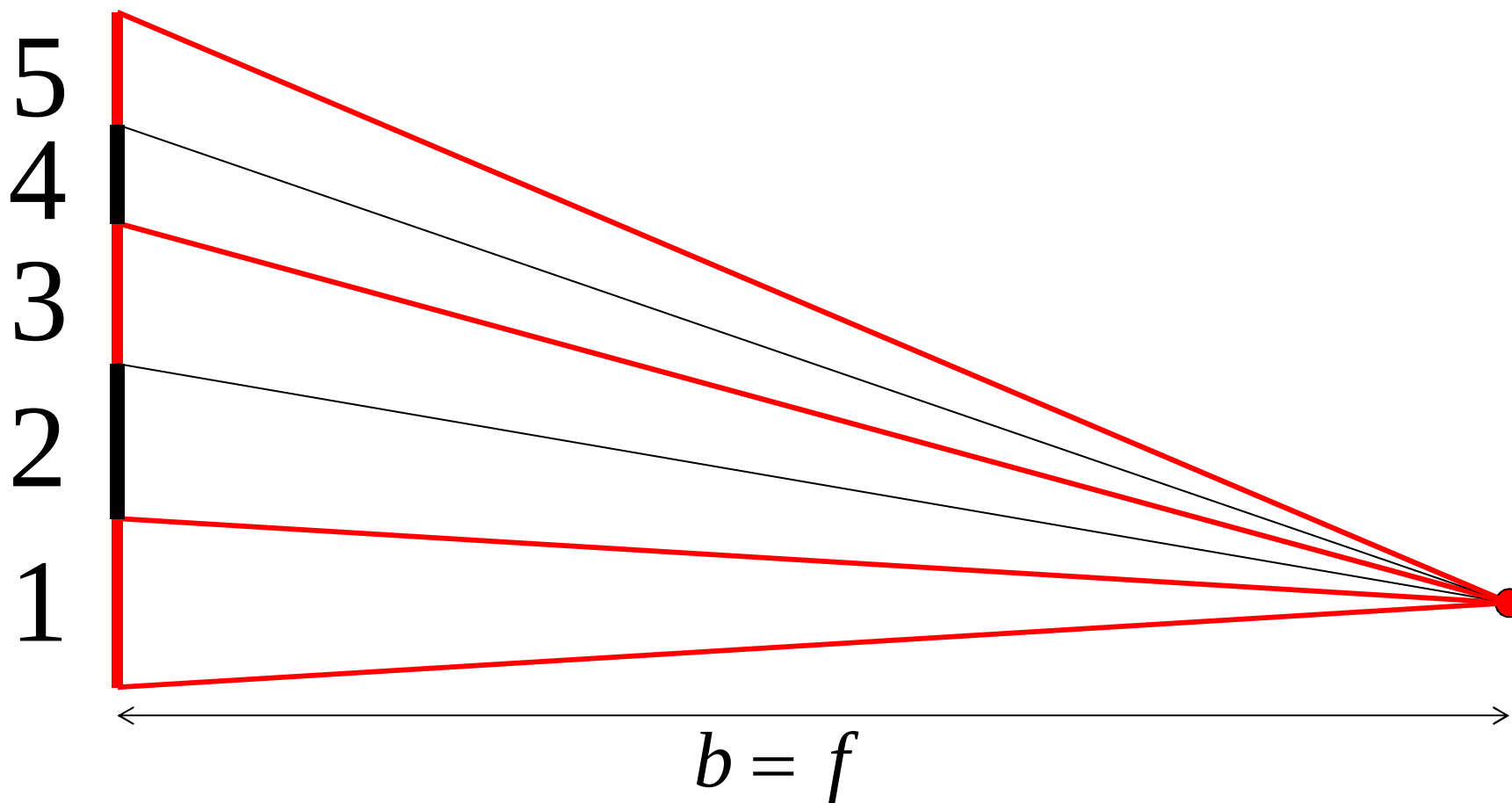
波带片方程的特点

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{\rho_m^2} = \frac{\lambda}{\rho_1^2} \quad f = \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = \frac{\rho_1^2}{\lambda} \quad m = \frac{\rho_m^2}{\lambda} \frac{1}{b}$$

- 对于某一个波长，波带片焦点的焦距是固定的。
- 对平行光，波带片为平面的。
- 在距离 b 处看来，半径为 ρ_m 的圆孔处是第 m 个半波带。
- 但除主焦点之外，还有许多个次焦点。
- 焦距随波长增加而缩短，这与普通玻璃透镜的色散结果相反，两者结合使用可以有效补偿色散。

2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点



$$m = \frac{\rho_m^2}{\lambda} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} \right)$$

$$m = \frac{\rho_m^2}{\lambda} \frac{1}{b}$$

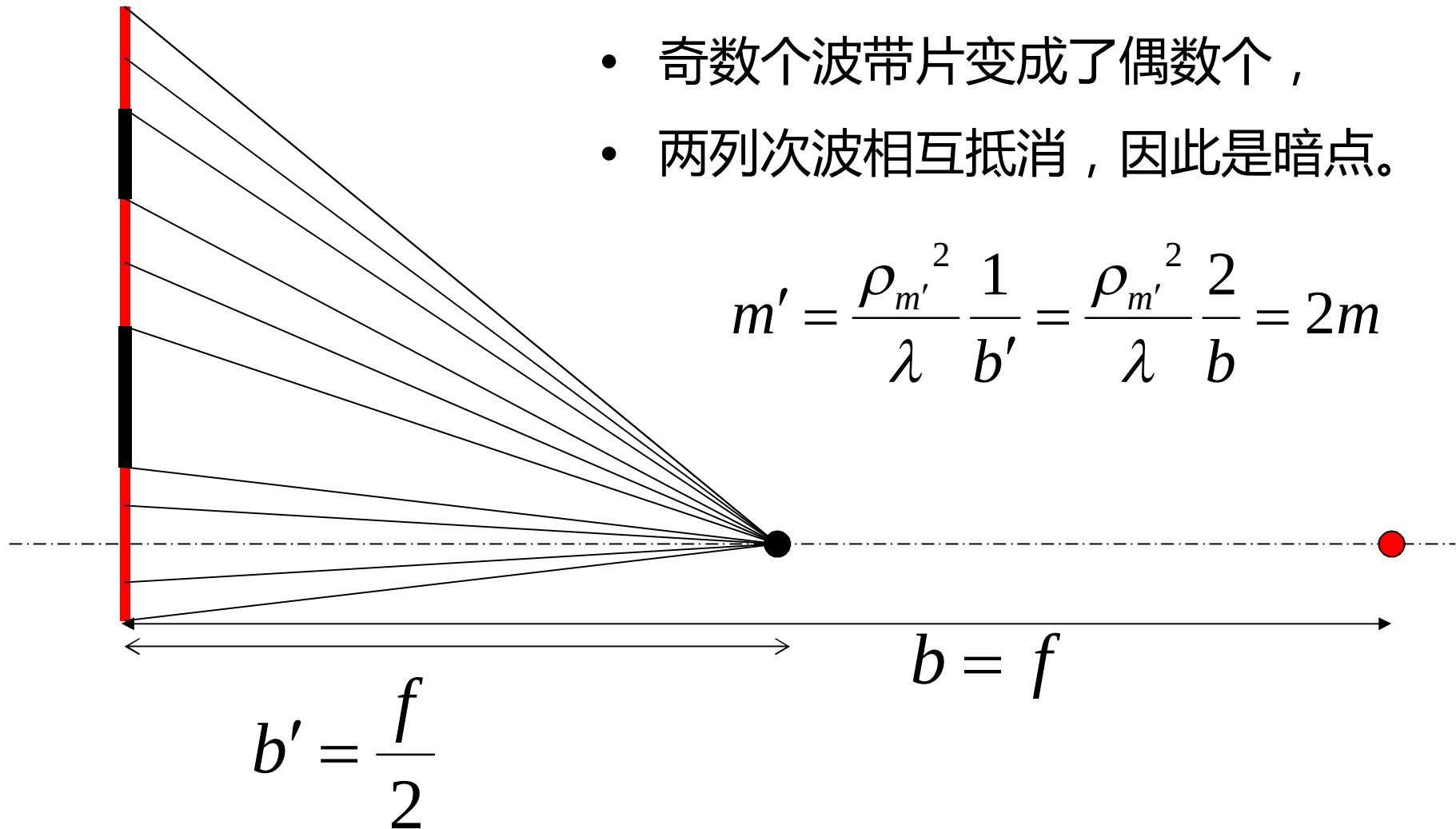
2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点

当 b 减小到 $f/2$ 时：

- 原来的每一个半波带可以分为2个，
- 奇数个波带片变成了偶数个，
- 两列次波相互抵消，因此是暗点。

$$m' = \frac{\rho_{m'}^2}{\lambda} \frac{1}{b'} = \frac{\rho_{m'}^2}{\lambda} \frac{2}{b} = 2m$$



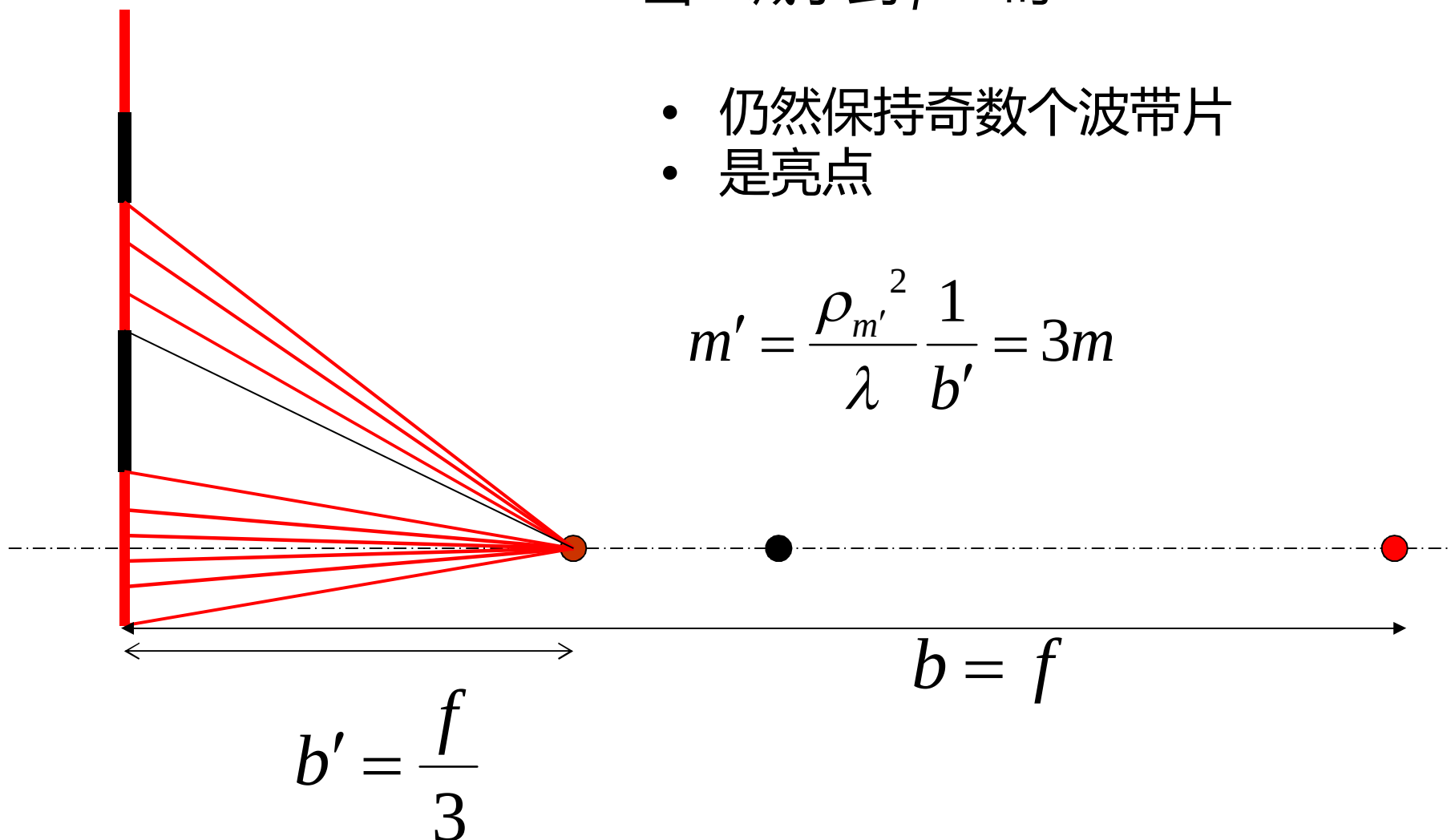
2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点

当 b 减小到 $f/3$ 时：

- 仍然保持奇数个波带片
- 是亮点

$$m' = \frac{\rho_{m'}^2}{\lambda} \frac{1}{b'} = 3m$$



2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{\rho_m^2} = \frac{\lambda}{\rho_1^2} \quad m = \frac{\rho_m^2}{\lambda} \frac{1}{b}$$

- 当波带片不变时， b 改变，会引起 m 的改变，即：可划分的半波带数目改变。
- b 减小，到 $b/2$ 时， $m'=2m$ ，暗点；
- b 减小，到 $b/3$ 时， $m'=3m$ ，亮点，次焦点；
- b 减小，到 $b/4$ 时， $m'=4m$ ，暗点.....

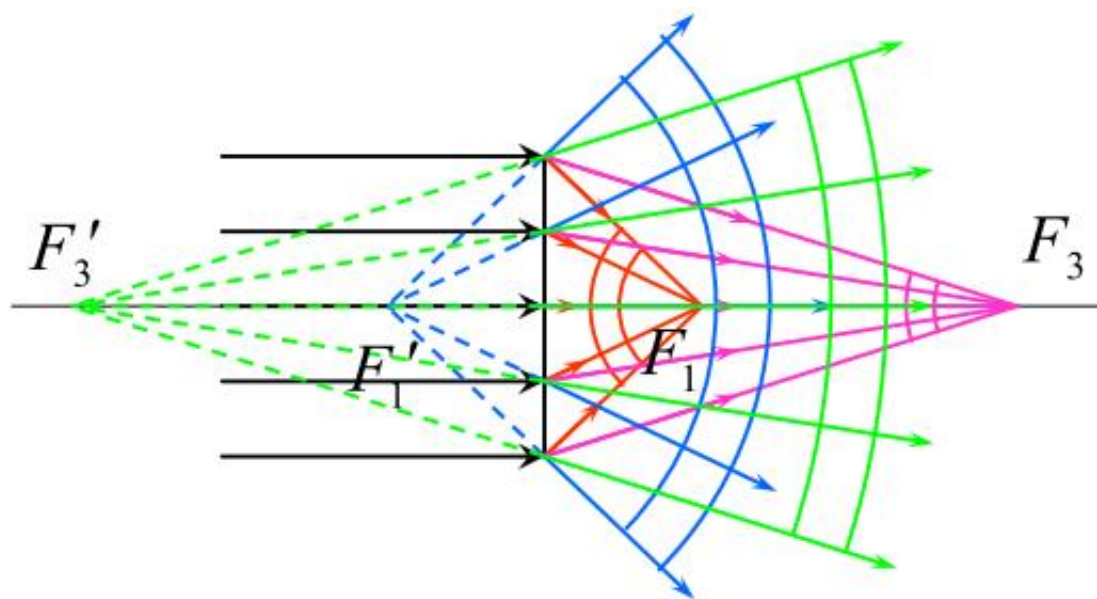
$$f' = \frac{f}{3}, \frac{f}{5}, \dots, \frac{f}{2m+1} \quad \text{一系列次焦点}$$

思考：次焦点的光强变化

2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点

次焦点（实焦点和虚焦点）： $f = \pm \frac{\rho_1^2}{\lambda}, \pm 3 \frac{\rho_1^2}{\lambda}, \pm 5 \frac{\rho_1^2}{\lambda}, \dots$



2.4 菲涅耳波带片

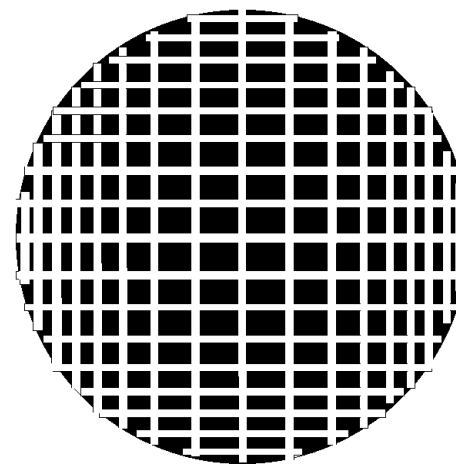
几种波带片的实例



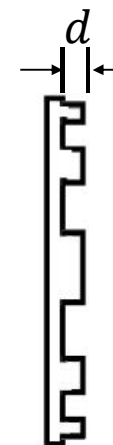
黑白波带片（圆形）



余弦波带片



黑白波带片（十字交叉）



位相波带片（浮雕波带片）

$$(n-1)d = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

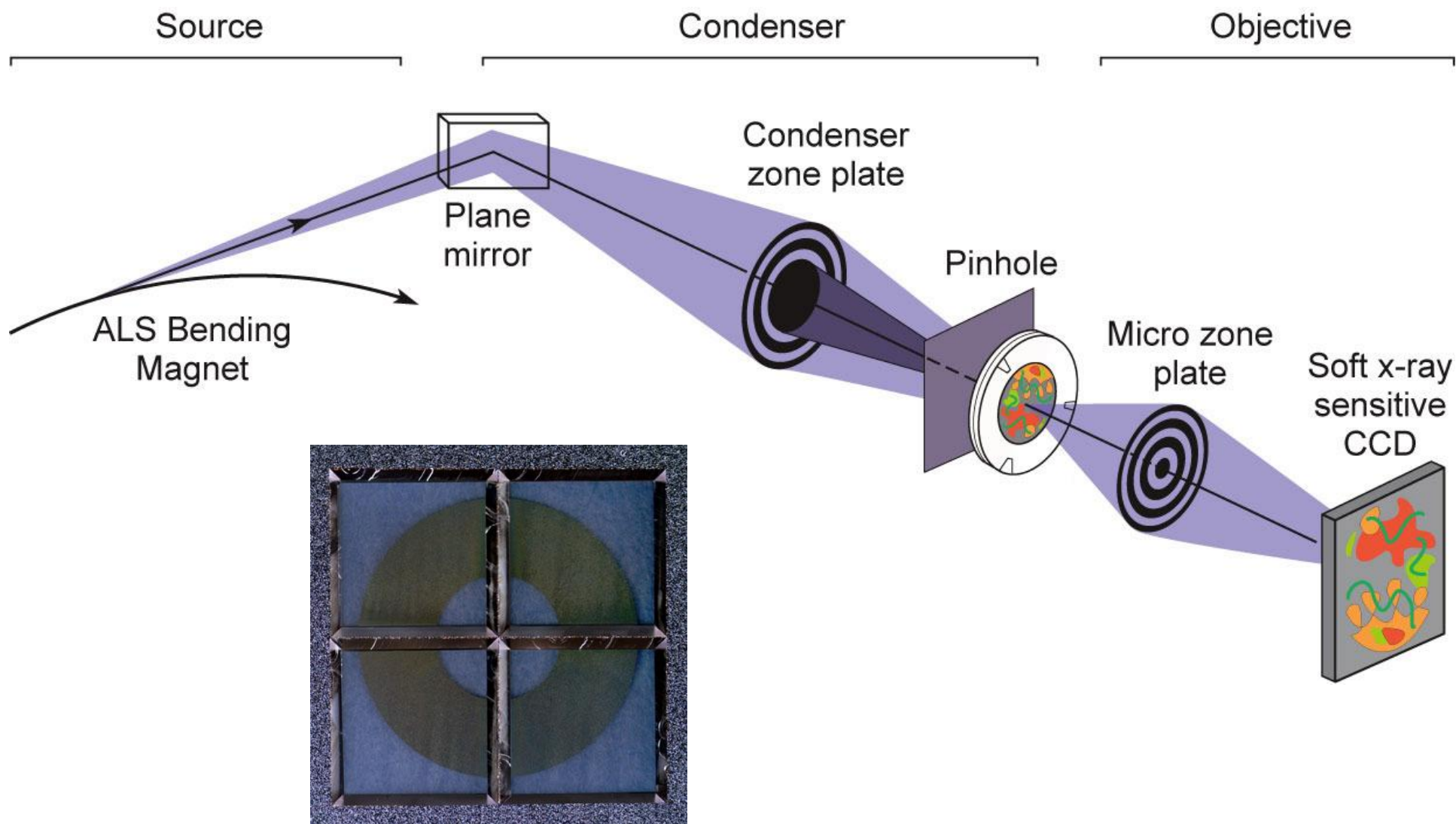
2.4 菲涅耳波带片

思考：

- (1) 波带片的优势和可能的应用。
- (2) 实际制作波带片的技术难度和解决办法。

2.4 菲涅耳波带片

应用：用于同步辐射软x射线的波带片



本节重点

1. 矢量图解法
2. 波带片的原理和计算

作业

P207~209 -- 1,5,8,10 (重排p151)